بهینه سازی
بهینه سازی مقید-دوگان

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

دوگانی

کران بالای مقدار بیشینهٔ تابع مقید

- بیشینهٔ تابع هدف $\leq$ بیشینهٔ تابع مقید

کران پایین مقدار کمینه تابع مقید

- کمینهٔ تابع هدف $\geq$ کمینهٔ تابع مقید

دوگانی

کران بالای مقدار بیشینهٔ تابع

- بیشینهٔ تابع هدف $\le$ بیشینهٔ تابع مقید

کران پایین مقدار کمینه تابع

- کمینهٔ تابع هدف $\ge$ کمینهٔ تابع مقید

$$P\begin{cases}\max -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 \\ \text{باتوجه} \\ x_1 + x_2 = 0\end{cases}$$

$$P_0\left\{\max -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1\right.$$

$$P_0 \ge P?\ (-1,0), \mathrm{f} = 1$$

دوگانی

کران بالای مقدار بیشینهٔ تابع

- بیشینهٔ تابع هدف $\leq$ بیشینهٔ تابع مقید

$$P\begin{cases}\max -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 \\ \text{باتوجه} \\ x_1 + x_2 = 0\end{cases}$$

$$P_\mu\left\{\max_{x_1,x_2} -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 - \mu(x_1 + x_2)\right.$$

$$P_\mu \geq P? \left(-1 - \frac{\mu}{2}, -\frac{\mu}{2}\right)$$

$$\mathrm{q}(\mu) = {P_\mu}^* = -\left(-1 - \frac{\mu}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\mu}{2}\right)^2 - 2\left(-1 - \frac{\mu}{2}\right) - \mu(-1 - \mu)$$

$$= \frac{\mu^2}{2} + \mu + 1$$

دوگانی

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

با توجه

$$g_i(\boldsymbol{x}) = c_i, \quad i \in \mathcal{E} \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$h_i(\boldsymbol{x}) \le b_i, \quad i \in \mathrm{I} \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

لاگرانژ

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c})$$

دوگان

$$q: \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R} :: q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

بدون محدودیت

قضیه

فرض $\boldsymbol{x}^*$ جواب بهینهٔ مسئله اصلی (یگان) باشد. اگر $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ و $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ و $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$

آن‌گاه $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$

اثبات

$$q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^T[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{b}] - \boldsymbol{\mu}^T[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c}]$$

$$= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \underbrace{- \underbrace{\boldsymbol{\lambda}^T[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{b}]}_{\boldsymbol{\lambda}\geq 0,[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{b}]\leq 0}}_{\geq 0} - \underbrace{\boldsymbol{\mu}^T[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{c}]}_{=0} \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$$

شروط لازم مرتبه اول ترکیب انواع قیدها

$\boldsymbol{x}^*$ بیشینه‌ساز محلی روی مجموعه مقید دارای m تساوی و k نامساوی

فرض تعداد k_0 ناتساوی از نوع قید مانع (binding) و $k-k_0$ ناتساوی از شمار قید غیرمانع(non binding)

فرض ماتریس ژاکوبی رتبه کامل

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\lambda_1,\dots,\lambda_k,\mu_1,\dots,\mu_m)=f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[h_i(\boldsymbol{x})-b_i]-\sum_{i=1}^{m}\mu_i[g_i(\boldsymbol{x})-c_i]$$

I) $\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\mu^*)}{\partial x_i}=0,\quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$

II) $\lambda_i^*[h_i(\boldsymbol{x}^*)-b_1]=0,\forall i\in\{1,\dots,k\}$

III) $g_i(\boldsymbol{x}^*)=c_i,\forall i\in\{1,\dots,m\}$

IV) $h_i(\boldsymbol{x}^*)\le b_i,\forall i\in\{1,\dots,k\}$

V) $\lambda_i\ge 0,\forall i\in\{1,\dots,k\}$

نتیجه

فرض $\boldsymbol{x}^*$ جواب بهینهٔ مسئله اصلی (یگان) باشد. همچنین $\boldsymbol{x}$ جواب شدنی مسئلهٔ اصلی باشد. اگر $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ و $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ و $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$

آن‌گاه $q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x})$

مسئلۀ دوگان

یافتن بهترین کران بالا

$$\min_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$$

با توجه

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

همچنین $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}: \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) < +\infty\}$

برنامه‌ریزی خطی

$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$
با توجه
$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

$$q(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\max_{\boldsymbol{x}}\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^T\ (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})\}\right] = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\max_{\boldsymbol{x}}\left\{\left(\boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\lambda}\right)^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\lambda}\right\}\right]$$

اگر $\boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$ آن‌گاه مقدار اکسترمم برابر $+\infty$

$$q(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} +\infty, & \boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\lambda}, & \boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$\min \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$
با توجه
$A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq 0$

برنامه‌ریزی خطی

$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$
با توجه
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq 0$

$$q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\max_{\boldsymbol{x}} \{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}^T \left(A^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \right) - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{x} \} \right] = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \left[\max_{\boldsymbol{x}} \left\{ \left(\boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} \right)^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\mu} \right\} \right]$$

اگر $\boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$ آن‌گاه مقدار اکسترمم برابر $+\infty$

$$q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} +\infty, & \boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\mu}, & \boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$\min \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$
با توجه
$A^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq 0$

قضیهٔ دوگان ضعیف

اگر x^* جواب بهینهٔ مسئله اصلی (یگان) باشد.

اگر $(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$ جواب بهینهٔ مسئلهٔ دوگان باشد.

آن‌گاه $q(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \geq \boldsymbol{f}(x^*)$

نتیجه

اگر یکی از مسئله‌ها (اعم از یگان یا دوگان) بی‌کران باشد، دیگری ناشدنی است.

قضیهٔ دوگان و شدنی (شدن‌پذیری!)

		مسئله دوگان		
		بهینه	**بی‌کران**	**ناشدنی**
مسئله یگان	**بهینه**	بله	خیر	خیر
	بی‌کران	خیر	خیر	بله
	ناشدنی	خیر	بله	بله

بهینه‌سازی - انواع

نام	f(x)	c(x)
بهینه‌سازی نامقید	غیرخطی	-
برنامه‌ریزی خطی	خطی	خطی
برنامه‌ریزی درجه دو	درجه دو	خطی
بهینه‌سازی مقید خطی	غیرخطی	خطی
بهینه‌سازی مقید یا بهینه‌سازی غیرخطی	غیرخطی	غیرخطی

منابع

B. H. Edwards, “Understanding Multivariable Calculus: Problems, Solutions, and Tips-Course Workbook,” The Great Courses, 2014.

J. Wilde, et al., “Constrained optimization,” 2013.

[فلچر]

B. W. Bader, “Constrained and unconstrained optimization,” 2009